Minimalizacja automatów niezupełnych.

Automatem zredukowanym nazywamy automat, który jest zdolny do wykonywania tej samej pracy, którą może wykonać dany automat, przy czym ma on mniejszą liczbę stanów.
Automat $\mathbf{M_{min}}$ nazywamy **automatem minimalnym** odpowiadającym automatowi **M**, jeśli nie istnieje automat zredukowany o mniejszej liczbie stanów.
Automat niezupełny to taki, który ma nieokreślone niektóre stany lub/i wyjścia (w tabeli występują kreski „**-**„).Automat niezupełny może mieć kilka automatów minimalnych lub może nie mieć żadnego, (czyli sam jest swoim automatem minimalnym).
Wyznaczenie automatu minimalnego odbywa się w procesie minimalizacji.
Przykład :

Stan obecny	Stany następne		Wyjścia	
	0	1	0	1
1	3	2	0	0
2	-	2	-	1
3	-	4	-	1
4	7	5	1	1
5	6	-	1	-
6	-	-	0	0
7	6	6	1	1

1.Konstruujemy tablicę trójkątną ułatwiającą porównanie stanów:

2						
3						
4						
5						
6						
7						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

2. Porównujemy stany wpisując do tabeli **x** w kratki, które odpowiadają stanom, które nie mogą być połączone gdyż mają różne wyjścia.(np. stan 1 ma na wyjściu 00 a stan 2 -1,czyli nie można ich połączyć)

2	X					
3	X					
4	X					
5	X					
6		X	X	X	X	
7	X					X
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

3.Wpisujemy **V** w kratki dla których wyjścia są identyczne, czyli:
$\forall x$ jeśli $\lambda(x,p)$ i $\lambda(x,q)$ są określone, to $\lambda(x,p) = \lambda(x,q)$; oraz:
a)stany są identyczne
b)jeden ze stanów jest nieokreślony, albo para stanów następnych jest taka sama jak para stanów obecnych

2	X					
3	X					
4	X					
5	X	V	V			
6	V	X	X	X	X	
7	X				V	X
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

4.W pozostałe kratki wpisujemy pary stanów następnych, jeśli porównywane stany mają te same wyjścia (wypisujemy pary stanów, które są warunkiem połączenia porównywanych stanów)

2	X					
3	X	(2,4)				
4	X	(2,5)	(4,5)			
5	X	V	V	(6,7)		
6	V	X	X	X	X	
7	X	(2,6)	(4,6)	(5,6)(7,6)	V	X
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

5.Sprawdzamy kratki w których wypisane były stany warunkowe. Jeżeli któryś z warunków jest nie spełniony (jego kratka jest oznaczona **X**-em) to sprawdzane pole również oznaczamy przez **X**. Jeżeli żaden z warunków nie jest niespełniony to kratkę oznaczamy **V**.

2	X					
3	X	(2,4)**V**				
4	X	(2,5)**V**	(4,5)**V**			
5	X	V	V	(6,7) **X**		
6	V	X	X	X	X	
7	X	(2,6)**X**	(4,6)**X**	(5,6)(7,6)**X**	V	X
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Kratki oznaczone V odpowiadają parom należącym do relacji **niesprzeczności stanów ~ ;** tzn. że:

1. Nie istnieje takie słowo dla którego litery wyjściowe końcowe są określone i różne od siebie;
2. Dla każdego słowa istnieje jeden z przypadków:
   a) litery wyjściowe końcowe są równe
   b) jedna z nich jest nieokreślona (lub obie)

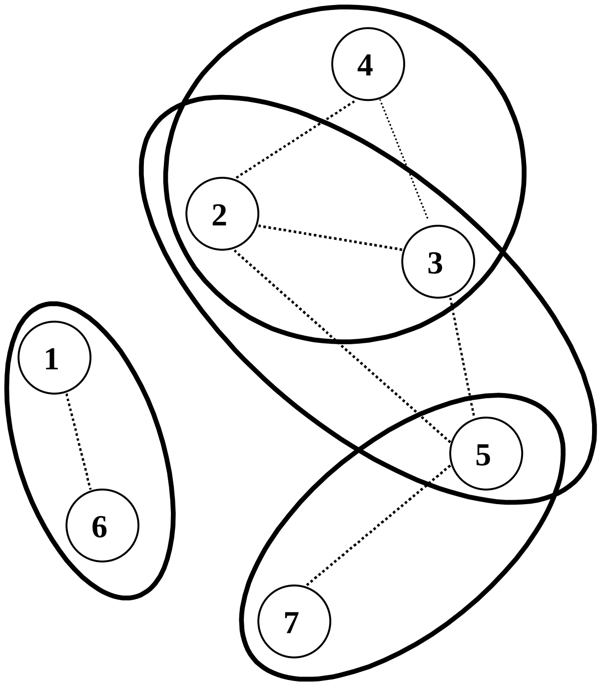
Zbiór stanów niesprzecznych **{$Q_{\sim}$}** to:

{$Q_{\sim}$} ={(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(5,7)}

Następnie wyznaczamy **rodzinę wszystkich maksymalnych zbiorów stanów niesprzecznych** za pomocą grafu **:**

1. Rysujemy graf w którym łączymy stany niesprzeczne;

2. Zakreślamy maksymalne zbiory stanów niesprzecznych (tzn. takie stany, które są wszystkie wzajemnie ze sobą połączone), tak aby wszystkie stany zostały zakreślone przynajmniej raz;
3. Wypisujemy zakreślone zbiory.



$\{Q_j\}$={{1,6},{2,3,4},{2,3,5},{5,7}}

Występowanie w zbiorze par {(2,3),(2,5)(3,5)} umożliwia utworzenie trzyelementowego zbioru {2,3,5} który będzie zbiorem maksymalnym. Występowanie w zbiorze par {(2,3),(2,4)(3,4)} umożliwia utworzenie trzyelementowego zbioru {2,3,4} który będzie zbiorem maksymalnym.
Zbiory $\{Q_j\}$ mogą nie być rozłączne, czyli mogą mieć wspólne elementy, dlatego liczba tych zbiorów może być większa od liczby stanów.

Należy teraz wyznaczyć najmniejszą rodzinę zamkniętą **$\{P_j\}$**,złożoną ze zbiorów stanów niesprzecznych, pokrywającą zbiór stanów automatu **S**. Powstaje ona w wyniku wybrania z rodziny$\{Q_j\}$ niektórych zbiorów lub ich części. W większości przypadków najdogodniejszym sposobem wyznaczenia rodziny $\{P_j\}$ jest metoda prób i błędów.
Pomocne okazuje się twierdzenie przybliżające liczbę zbiorów w tej rodzinie, czyli n :
$d \leq n \leq g = \min(k,t)$, gdzie
k - liczba zbiorów rodziny Q_j ;
t – liczba stanów pierwotnego automatu;
d – najmniejsza liczba zbiorów maksymalnych niezbędna do pokrycia stanów pierwotnych.

W naszym przypadku:
Stany1i6 występują tylko w pierwszym zbiorze, stan 4 tylko w drugim, 3 w trzecim ,a 7 w czwartym; stąd *k*=4.
$4 \leq n \leq \min(4,7)$
z nierówności wnioskujemy że rodzina P_j ma 4 elementy czyli automat minimalny będzie miał 4 stany.

Zaczynamy od rodziny maksymalnych zbibiorów stanó zgodnych:
{{1,6},{2,3,4},{2,3,5},{5,7}}
Sprawdzamy czy jest ona **rodziną zamkniętą, (**czyli że dla każdego zbioru stanów niesprzecznych T_i i każdej litery wejściowej x , istnieje należący do tej rodziny zbiór T_j do którego należy zbiór stanów następnych zbioru T_i : $\delta(x, T_i) \subseteq T_j$ **).**

W tym celu :
a)sporządzamy pewnego rodzaju tablicę przejść w której stany obecne wpisujemy w grupach, takich jakie zbiory były w badanej rodzinie:

Wejście	**Stany obecne**			
	(1,6)	(2,3,4)	(2,3,5)	(5,7)
0 1				

b)pod stanami obecnymi wpisujemy odpowiadające im stany następne:

Dla {{1,6},{2,3,4},{2,3,5},{5,7}}

Wejście	**Stany obecne**			
	(1,6)	(2,3,4)	(2,3,5)	(5,7)
0	(3, -)	(-,-,7)	(-,-,6)	(6,6)
1	(2, -)	(**2,4,5**)	(2,4,-)	(-, 6)

c)sprawdzamy czy powstałe w ten sposób zbiory stanów następnych, dla każdego słowa wejściowego, mają odpowiadający sobie zbiór stanów obecnych (są podzbiorem jakiegoś stanu obecnego),a więc:
$\delta^*(0,\{1,6\}) = \{3,-\}$ a zbiór ten należy do zbioru {2,3,5}-czyli w porządku;
ale już $\delta^*(1,\{2,3,4\}) = \{2,4,5\}$ zbiór {2,4,5} <u>nie należy</u> do żadnego zbioru naszej rodziny, gdyż 2,4 i 5 występują w niej w osobnych zbiorach: {2,3,4} oraz {5,7}

Widzimy, że rodzina {{1,6},{2,3,4},{2,3,5},{5,7}}nie jest rodziną zamkniętą,

Rodzina nie jest zamknięta bowiem nie istnieje zbiór {2,4,5}!!!

Sprawdzamy inne rodziny 4 elementowe pokrywające stany automatu.
Wybieramy przykładowo:
{{1,6},{4},{2,3,5},{5,7}};
{{1,6},{2,4},{2,3,5},{7}};
{{1,6}.{2,4},{3,5},{5,7}};
.
Sprawdzamy czy są one **rodzinami zamkniętymi.**

Sprawdzamy {{1,6},{4},{2,3,5},{5,7}};

Wejście	Stany obecne			
	(1,6)	(4)	(2,3,5)	(5,7)
0	(3, -)	(7)	(-,-,6)	(6,6)
1	(2, -)	(5)	**(2,4,-)**	(-, 6)

Rodzina nie jest zamknięta, więc musimy więc sprawdzić następną: {{1,6},{2,4},{2,3,5},{7}} w podobny sposób:

Wejście	Stany obecne			
	(1,6)	(2,4)	(2,3,5)	(7)
0	(3, -)	(-,7)	(-,-,6)	(6)
1	(2, -)	(2,5)	(2,4,-)	(6)

Mamy:

$\delta^*(0,\{1,6\}) = \{3,-\} \subseteq \{2,3,5\}$;

$\delta^*(1,\{1,6\}) = \{2,-\} \subseteq \{2,3,5\},\ oraz\ \{2\} \subseteq \{2,4\}$;

$\delta^*(0,\{2,4\}) = \{-,7\} \subseteq \{7\}$;

$\delta^*(1,\{2,4\}) = \{2,5\} \subseteq \{2,3,5\}$;

$\delta^*(0,\{2,3,5\}) = \{-,-,6\} \subseteq \{1,6\}$;

$\delta^*(1,\{2,3,5\}) = \{2,4,-\} \subseteq \{2,4\}$;

$\delta^*(0,\{7\}) = \{6\} \subseteq \{1,6\}$;

$\delta^*(1,\{7\}) = \{6\} \subseteq \{1,6\}$;

Zatem rodzina {{1,6},{2,4},{2,3,5},{7}} spełnia warunek zamknięcia, więc na jej podstawie wyznaczymy automat minimalny.

Poszczególnym jej zbiorom przyporządkowujemy więc nowe nazwy np. **a={1,6}** ; **b={2,4}** , **c={2,3,5}** i **d={7}**.

Konstruujemy automat minimalny:

Stan obecny	stany następne		wyjścia	
	0	**1**	**0**	**1**
a	c	bvc	0	0
b	d	c	1	1
c	a	b	1	1
d	a	a	1	1

Symbol b v c (b lub c) wystąpił gdyż 2 należy zarówno do nowego stanu b jak i do c. Podczas dalszego projektowania należy przyjąć jedną z możliwości: $\delta^*(1,a) = b$ lub $\delta^*(1,a) = c$.

W ten sposób otrzymaliśmy **automat minimalny** ,który pokrywa automat M i ma najmniejszą możliwą liczbę stanów.