Minimalizacja formuł Boolowskich

Stosowanie reguł algebry Boole'a w celu minimalizacji funkcji logicznych jest niedogodne

- brak metody, aby stwierdzić czy dana formuła może być jeszcze minimalizowana
- czasami należy daną formułę bardziej skomplikować, aby uzyskać prostszy wynik. Np.: 1=(X+X')
- nieporęczna, łatwo o błąd.

Ćwiczenie. Dokonać minimalizacji funkcji logicznych przedstawionych poniżej.

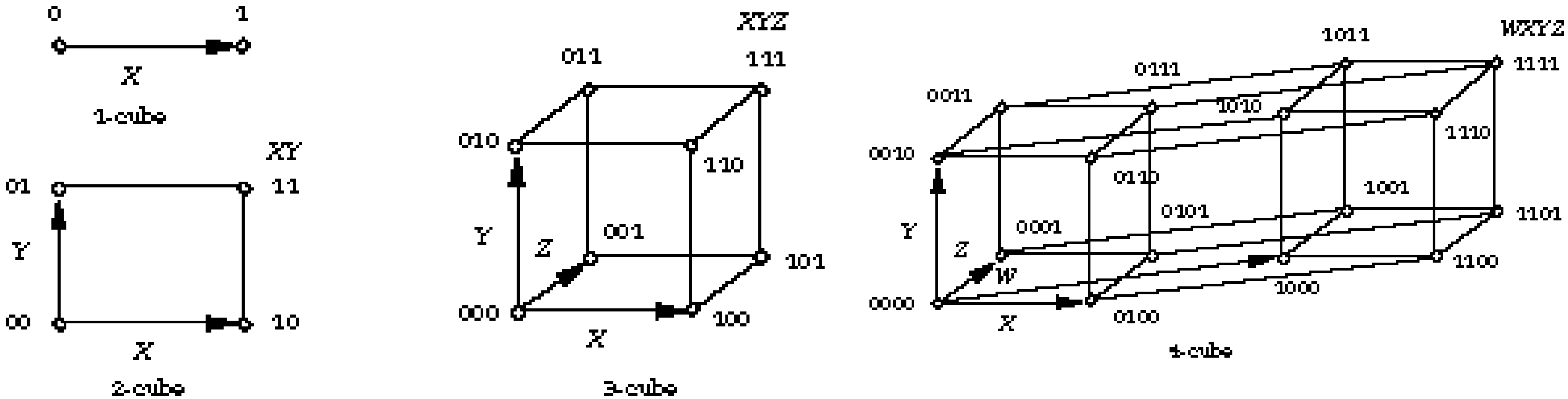
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

??? Minimalizacja jest możliwa jeżeli dwa wektory wejściowe dla których funkcja przyjmuje taką samą wartość różnią się jednym argumentem.

Kostki logiczne

Dogodne będzie takie przedstawienie funkcji, aby wektory sąsiadujące (różniące się jednym argumentem) łatwo dawały się łączyć w grupy.
Dogodne będzie przedstawienie funkcji logicznej przy pomocy kostki w **kostki** w przestrzeni n wymiarowej (n jest ilością argumentów funkcji).
Dla każdej zmiennej jest jedna oś na której zmienna przybiera wartość 0 lub 1.

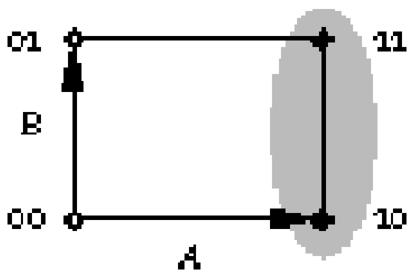


Kostki logiczne C.D.

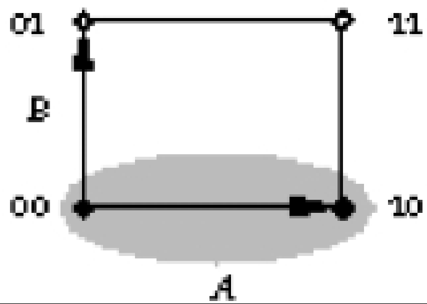
Możemy graficznie odwzorować funkcję logiczną na kostce logicznej w następujący sposób.
- Jeżeli dla danego wektora funkcja przyjmuje wartość 1 to wierzchołek kostki jest czarny
- Jeżeli dla danego wektora funkcja przyjmuje wartość 0 to wierzchołek kostki jest biały

Przykład
Odwzorowano funkcje logiczne z przykładu na dwuwymiarowych kostkach logicznych

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1



A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

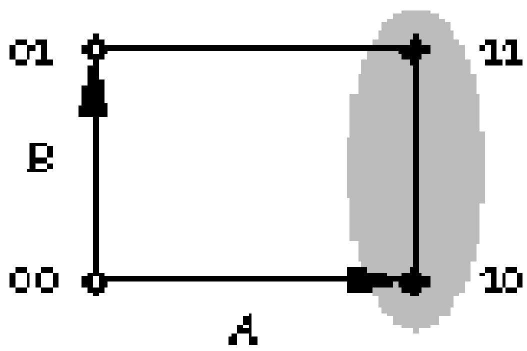


Ćwiczenie. Narysować kostkę logiczną dla funkcji $F^1=\{0,1,2,4\}$

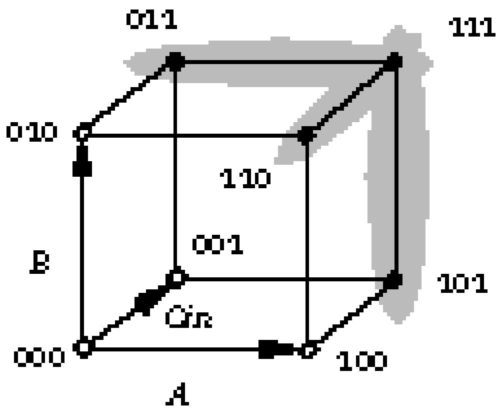
Kostki. Wyznaczanie implikantów

Implikantem G funkcji F będzie iloczyn zmiennych taki, że kiedy G()=1 to F()=1.
W najprostszym przypadku implikantami są mintermy w postaci kanonicznej sumy.
Pokryciem funkcji logicznej nazywamy zbiór implikantów pokrywających jej minitermy.
Chcemy aby jeden implikant pokrywał maksymalnie dużo jedynek funkcji F.

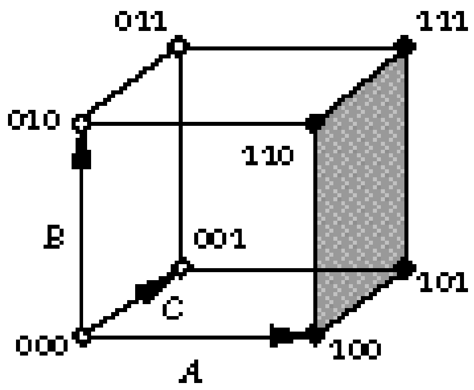
Przykład. Wyznaczanie implikantów dla kostek logicznych.
Wierzchołki kostki mogą być opisane przy pomocy jednego implikantu jeżeli przylegają do siebie w przestrzeni n wymiarowej.



F1(A,B)=A



F2(A,B,C)=AB+BC+AC



F3(A,B,C)=A

Kostki. Wyznaczanie implikantów. C.D.

Dla kostki 3 wymiarowej

- przyleganie minitermów w przestrzeni jednowymiarowej odpowiada 2 składnikowemu iloczynowi/implikantowi.
- przyleganie minitermów w przestrzeni dwuwymiarowej odpowiada 1 składnikowemu iloczynowi /implikantowi
- przyleganie minitermów w przestrzeni trójwymiarowej określa funkcję jako stałą
- przyleganie minitermów w przestrzeni zerowymiarowej odpowiada 3 składnikowemu iloczynowi /implikantowi

Pokryciem funkcji logicznej nazywamy zbiór implikantów pokrywających jej minitermy.
Mocą (rozmiarem) pokrycia nazywamy liczbę jego implikantów.
Minimalne pokrycie jest pokryciem o najmniejszej mocy.

Celem minimalizacji jest znalezienie minimalnego pokrycia.

Tablice Karnaugh.

Tablica Karnaugh jest dwuwymiarową tablicą prawdy.

Numerowanie kolumn i wierszy tablicy odbywa się w kodzie Gray'a.

Kod Grey'a to taki w którym kolejne pozycje różnią się tylko pojedynczym bitem:

Np.: {0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100, 1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011,1001,1000}

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Z; B \ A	0	1
0	0	1
1	1	0

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Z; B,C \ A	0	1
00	0	1
01	1	0
11	0	1
10	1	0

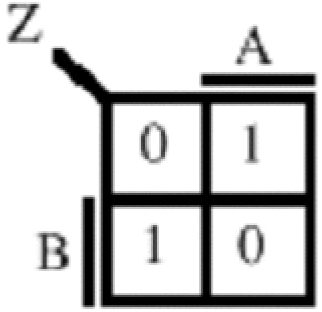
Ćwiczenie. Dokonać odwzorowania kostki 3D w strukturę tablicy Karnaugh

Struktura tablicy Karnaugh'a jest taka, że sąsiadujące komórki są sąsiadującymi również w strukturze kostki.

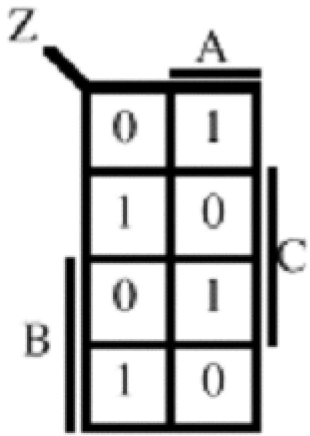
Diagramy Vichy

Inną formą graficznego przedstawienia tablicy prawdy na płaszczyźnie są **diagramy Vichy.** Od tablicy Karnaugh różnią się one sposobem opisania kolumn i wierszy tablicy

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



Ćwiczenie1. Narysować diagram Vichy odpowiadający tablicy Kranugh.

Ćwiczenie2. Wpisać w kratki tablicy Karanugh/ diagramu Vichy 4 zmiennych numery odpowiadających im mintermów.

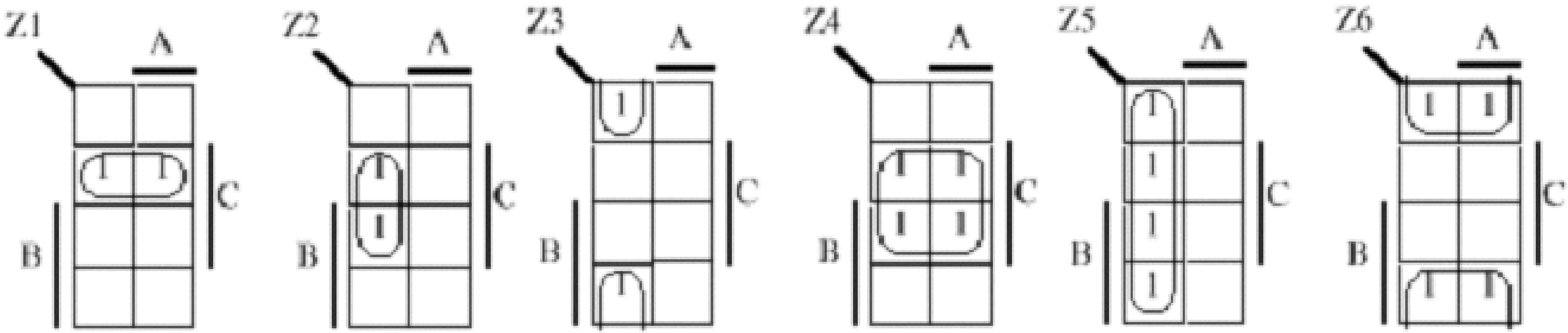
Metoda Karnaugh. Grupowanie mintermów.

Podobnie jak w kostce logicznej tak i w tablicy Karnaugh sąsiadujące wierzchołki (mintermy) mogą być grupowane w celu wyznaczenia wspólnego implikantu.

Zasady grupowania

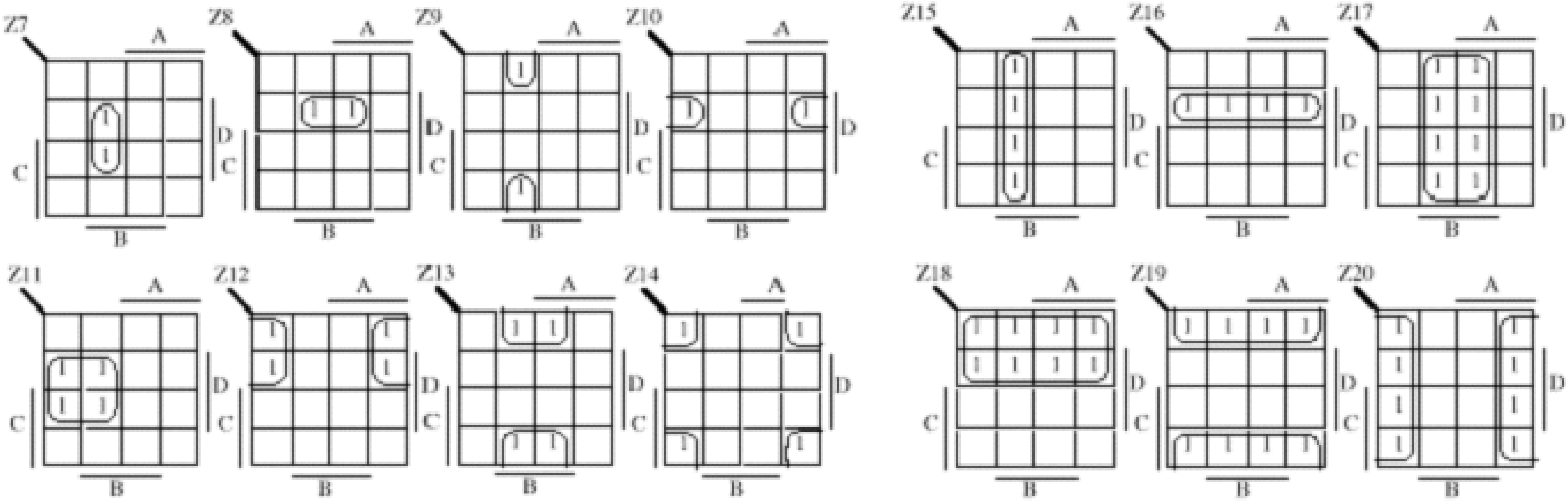
- Ilość mintermów które mogą być grupowane wynosi 2^i, gdzie $1<i<k$. K - ilość zmiennych.
- Ilość zmiennych które są stałe w danej grupie wynosi k-i.

Przykład. Sposób grupowanie mintermów dla funkcji 3 zmiennych. Grupy 2 i 4 elementowe



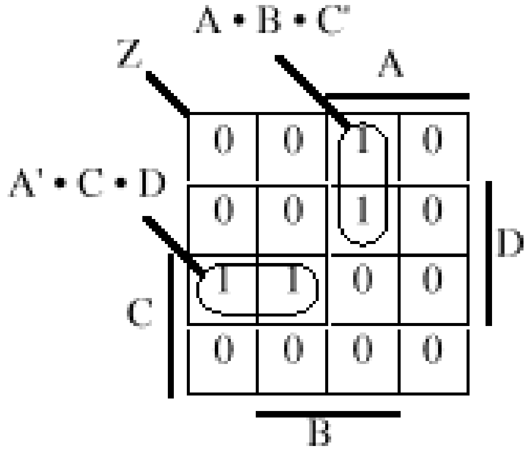
Metoda Karnaugh. Grupowanie mintermów. C.D.

Przykład. Sposób grupowanie mintermów dla funkcji 3 zmiennych. Grupy 2 i 4 elementowe



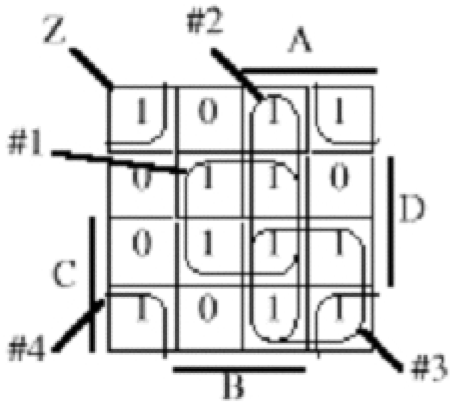
Wyznaczanie implikantów

Dowolne dwa sąsiadujące minitermy mogą być zredukowane.
Dla tablicy k elementowej redukowane mogą by również grupy 4, 8, 2^k minitermów. Grupy te mogą być opisane odpowiednio przez (k-2), (k-3),(k-4),..,0 zmiennych



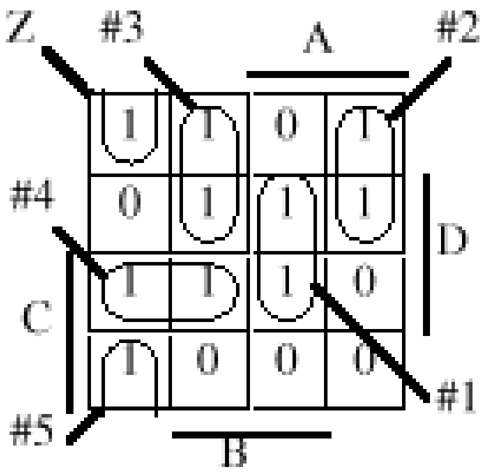
Reguły wyznaczania implikantów.

- Jeżeli zmienna X jest 0 we wszystkich kratkach w grupie wtedy w iloczynie występuje literał X'
- Jeżeli zmienna X jest 1 we wszystkich kratkach w grupie wtedy w iloczynie występuje literał X
- Jeżeli zmienna X jest nieokreślona (w niektórych kratkach 0, w niektórych 1), to X nie występuje w iloczynie .

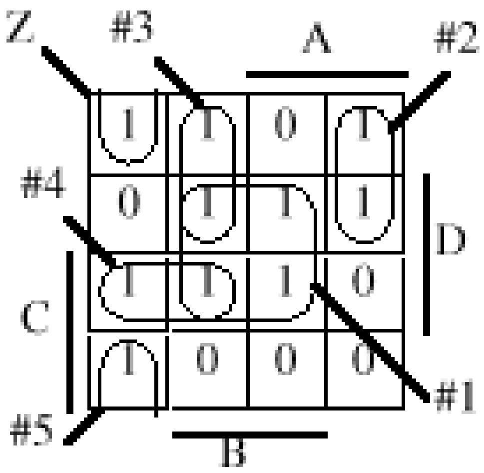


Ćwiczenie. Wyznaczyć implikanty dla funkcji przedstawionej na drugim rysunku

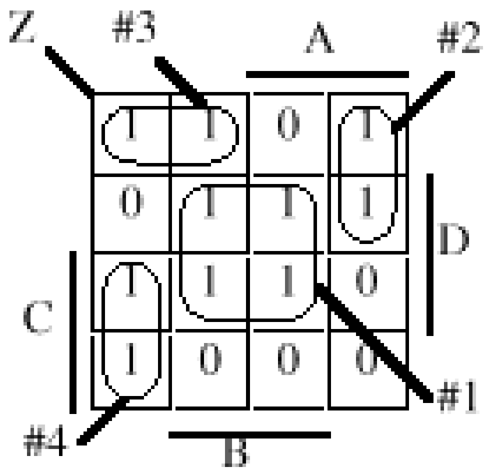
Tablice Karanugh. Wyznaczanie pokrycia.



a)



b)



c). Minimalne

a. $Z = A \bullet B \bullet D + A \bullet B' \bullet C' + A' \bullet B \bullet C' + A' \bullet C \bullet D + A' \bullet B' \bullet D'$

b. $Z = B \bullet D + A \bullet B' \bullet C' + A' \bullet B \bullet C' + A' \bullet C \bullet D + A' \bullet B' \bullet D'$

c. $Z = B \bullet D + A \bullet B' \bullet C' + A' \bullet C' \bullet D' + A' \bullet B' \bullet C$

Metoda minimalizacji funkcji logicznych Karnaugh

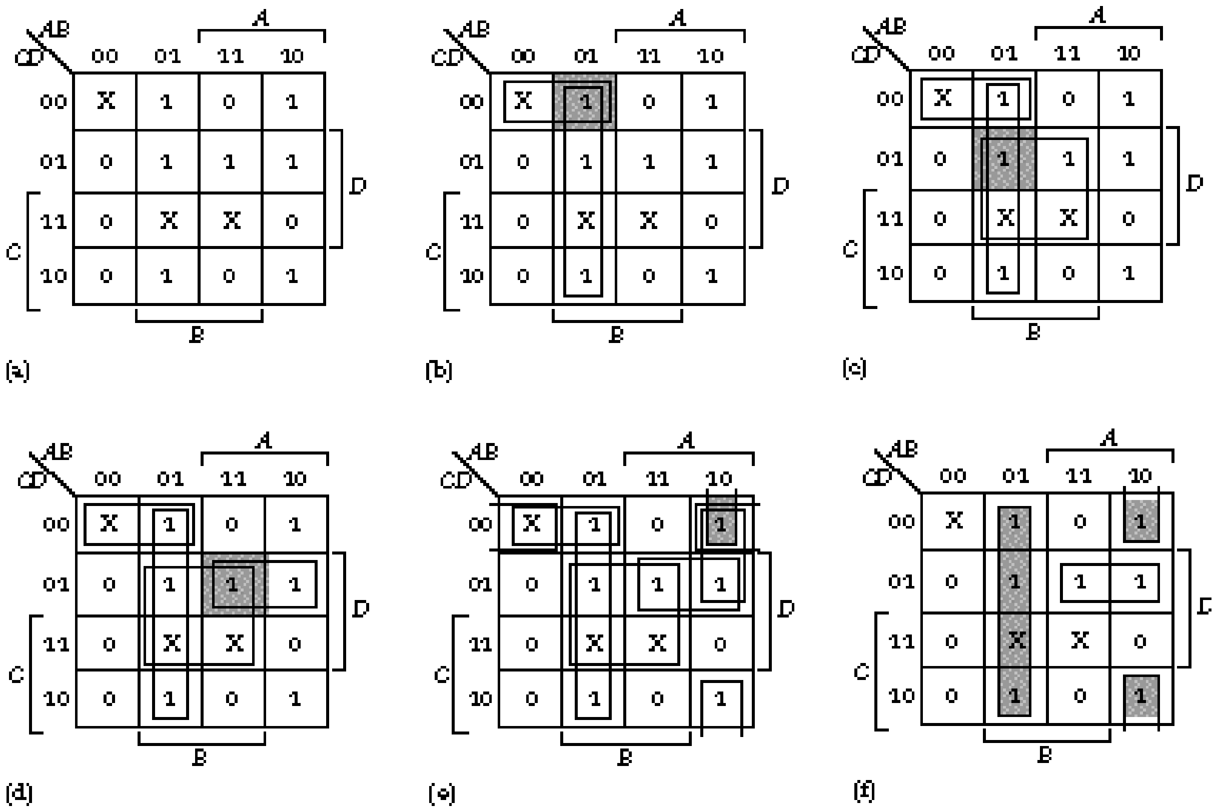
Aby zminimalizować wynikową formułę Boolowską należy stosować następujący algorytm:

1. Wybierz 1 z tablicy i zaznacz maksymalną grupę jaką da się utworzyć wokół. Powtórz czynność dla wszystkich 1.
2. Sprawdź wszystkie 1. Jeżeli dana 1 należy tylko do jednej grupy, to należy grupę tą dopisać do listy implikantów. Powtórzyć czynność dla wszystkich 1. Jedynki opisane wcześniej są pomijane.
3. Pozostałe 1 opisać przy pomocy minimalnej liczby implikantów.

Ćwiczenie. Zminimalizować metodą Karanugh funkcję F: F^1={0,1,2,4,5,6,7,8,12,13,15}

Metoda Karnaugh. Funkcje nie w pełni określone.

Kwadraty w których funkcja jest nieokreślona powinny być tak wykorzystane, aby maksymalizować tworzone grupy



F=A'B+AC'D+AB'D'

Minimalizacja Karnaugh postaci kanonicznej iloczynu

Sposób rozumowania przeprowadzony dla wartości 1 funkcji logicznych można przeprowadzić dla wartości 0 funkcji.

Zamiast o implikantach mówimy jednak o implicjentach funkcji logicznej. **Implicjentem** G funkcji F będzie iloczyn zmiennych taki, że kiedy G()=0 to F()=0.

Najprostszymi implicjentami funkcji są maxtermy tworzone dla postaci kanonicznej iloczynu.

Łączone w grupy zera funkcji mogą być opisywane w postaci odpowiednich sum które tworzymy analogicznie jak dla grup jedynek z tą różnica, że **zmienna** jest **zanegowana** jeżeli w zaznaczonej grupie jest **jedynką**

Ćwiczenie. Zminimalizować do postaci kanonicznej iloczynu metodą Karanugh funkcję F: F^0={0,1,4,5,6,7,12} F^*={8,13,15}