Algebra Boole'a

Algebrą Boole'a nazywamy zbiór B, wyróżnione jego podzbiory O i I oraz operacje dwuargumentowe +; •, które dla dowolnych elementów X, Y, Z zbioru B spełniają następujące aksjomaty:

•$X+Y \in B$;	$X \bullet Y \in B$	(domknięcie)
•$X+Y=Y+X$;	$X \bullet Y=Y \bullet X$;	(przemienność)
•$X \bullet (Y+Z)=X \bullet Y+X \bullet Z$;	$X+Y \bullet Z=(X+Y) \bullet (X+Z)$	(rozdzielność)
•$X+O=X$	$X \bullet I=X$	(element neutralny)
•Dla każdego X istnieje X' takie że: $X+X'=I$;	$X \bullet X'=O$	(element odwrotny)

<u>Dwuelementową realizację algebry Boole'a</u> otrzymujemy dla

B={0,1};

O=0;

I=1;

+:	1+1=1;	•:	1 •1=1;	Jeżeli X=1, to X'=0
	1+0=1;		1 •0=0;	Jeżeli X=0, to X'=1
	0+1=1;		0 •1=0;	
	0+0=0.		0 •0=0.	

Ćwiczenie

Sprawdź, czy algebra zbiorów jest również algebrą Boole'a. Padaj wszystkie elementy takiej realizacji.

Właściwości algebry Boole'a

Zasada dualizmu. Zastępując działanie '•' działaniem '+', a działanie '+' działaniem '•' oraz stałą I stałą 0, a stałą 0 stałą I w dowolnej tożsamości otrzymujemy również tożsamość.

Idempotentność

$X \bullet X = X$ $\qquad$ $X + X = X$

Łączność

$(X \bullet Y) \bullet Z = X \bullet (Y \bullet Z)$ $\qquad$ $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

Pochłanianie

$X \bullet (X + Y) = X$ $\qquad$ $X + (X \bullet Y) = X$

Prawa de Morgana

•$(X + Y)' = X' \bullet Y'$ $\qquad$ $(X \bullet Y)' = X' + Y'$

Prawo podwójnej negacji

$(X')' = X$

W algebrze Boole'a nie obowiązuje zasada skracania !!!

Jeżeli $A \bullet B = A \bullet C$ to nie znaczy że $B = C$.

Podobnie: Jeżeli $A + B = A + C$ to nie znaczy że $B = C$

Ale: Jeżeli $A \bullet B = A \bullet C$ i $A + B = A + C$ to $B = C$

Ćwiczenie

1. Udowodnij $X \bullet X = X$
2. Udowodnij prawa de Morgana.

Funkcje logiczne

Funkają logiczną n zmiennych nazywamy funkcję która dla każdego n elementowego wektorowa elementów zbioru {1, 0} przyjmuje pojedynczy element zbioru {1,0) lub jest nieokreślona.

f: $\{1,0\}^n \rightarrow \{1,0\}$.

Formuła boolowską nazywamy zapis zbudowany ze zmiennych połączonych działaniami +, •, ‘ (negacja).
Formuła boolowska przedstawia funkcję logiczną jeżeli dla kolejnych wektorów przyjmują zgodne wartości.
Dla przykładu: $f(X_2, X_1, X_0) = X_1 X_0' + X_2 X_0 + X_2 X_1 X_0'$ (pominięto symbol iloczynu pomiędzy zmiennymi)

Tablicą prawdy nazywany tablicę w której każdemu wierszowi odpowiada jeden wektor zmiennych wejściowych dla którego podano odpowiadający mu dziesiętny indeks naturalny oraz wartość wyjściową funkcji {0,1,-}

Zbiory numerów wektorów

$F^0 = \{ i \mid f(i)=0 \}$

$F^1 = \{ i \mid f(i)=1 \}$

$F^* = \{ i \mid f(i)= — \}$

i	X_2	X_1	X_0	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	-
4	1	0	0	1
5	1	0	1	-
6	1	1	0	0
7	1	1	1	-

Przykład tablicy prawdy

Ćwiczenie

Podać tablicę prawdy oraz zbiory F^0, F^1, F^* funkcji $f(X_2, X_1, X_0)$ określonej formułą

$X_2' X_1' X_0' + X_2 X_1' X_0 + X_1 X_0'$

Funkcje logiczne – C.D.

Podstawowe funkcje logiczne jednej i dwóch zmiennych

Funkcja NOT		$f(x)=x'$
Funkcja AND		$f(x,y) = x \bullet y$
Funkcja OR		$f(x,y) = x+y$
Funkcja NAND	(NOT AND)	$f(x,y) = (x \bullet y)'$
Funkcja NOR	(NOT OR)	$f(x,y) = (x+y)'$
Funkcja EXOR	(SUMA WYŁĄCZAJĄCA; EXCLUSIVE OR)	$f(x,y)=x' \bullet y+x \bullet y' = x\oplus y$

Ćwiczenie

Podać tablice prawdy funkcji NAND, NOR, EXOR

System (F, O, I, +, •) gdzie: F jest zbiorem wszystkich funkcji logicznych, O, I funkcje stałe zero i jeden
+: operacja logicznej sumy jest określona:

Jeżeli $F= F_A + F_B$ to $F= \{ X\to F(X)=F_A(X) + F_B(X) \}$

•: operacja logicznego iloczynu jest określona:

Jeżeli $F= F_A \bullet F_B$ to $F= \{ X\to F(X)=F_A(X) \bullet F_B(X) \}$

jest algebrą Boole'a

Funkcją w **pełni określoną** nazywamy funkcję która każdemu możliwemu wektorowi wejściowemu przypisuje określony stan. Oznacza to brak kresek w tablicy prawdy oraz $F^*=\emptyset$
Dokładne określenie stanów nie zdefiniowanych dla funkcji nie w pełni określonych jest ważne w procesie minimalizacji formuł Boolowskich i umożliwia otrzymanie optymalnych rozwiązań praktycznych realizacji funkcji.

Funkcje logiczne – C.D.(2)

Systemy funkcjonalnie pełne

System operatorów nazywamy systemem funkcjonalnie pełnym jeżeli każda funkcja może być przedstawiona za pomocą formuły zbudowanej przy użyciu tych operatorów.

Przykłady systemów operatorów funkcjonalnie pełnych:

- { + , • , negacja}
- { + , negacja}
- { • , negacja}
- { NAND}
- { NOR }

Układem funkcji nazywamy realizację złożoną z dwóch lub więcej funkcji logicznych.
Często dla wygody lub z powodów praktycznych łączymy tablice prawdy wielu funkcji w jedną tablicę prawdy z wieloma zmiennymi wyjściowymi.
Takie postępowanie w wielu przypadkach umożliwia również uzyskanie prostszych realizacji fizycznych.

Przykład:
W(A,B,C,D); X(A,B,C,D); Y(A,B,C,D); Z(A,B,C,D) połączono w jedną tablicę prawdy.

A	B	C	D	W	X	Y	Z
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	X	X	X	X
1	0	1	1	X	X	X	X
1	1	0	0	X	X	X	X
1	1	0	1	X	X	X	X
1	1	1	0	X	X	X	X
1	1	1	1	X	X	X	X

Dysjunkcyjna postać kanoniczna funkcji

Postać dysjunkcyjna. (sumy iloczynów, sumy)

Literałem nazywamy zmiennaą lub zmienna zanegowaną.

Produktem termalnym nazywamy iloczyn dwóch lub więcej literałów.

Minterm to produkt termalny bez powtarzających się zmiennych.

Postać dysjunkcyjna funkcji jest tworzona w następujący sposób:

„Każdy wiersz w tablicy prawdy dla którego funkcja przyjmuje wartość 1 tworzy produkt termalny w którym zmienne przyjmujące wartość 1 są wpisywane w sposób prosty, a zmienne przyjmujące wartość 0 w sposób zanegowany. Tak tworzone mintermy są sumowane tworząc kanoniczną postać dysjunkcyjną dla funkcji.”

Mintermy utworzone dla poszczególnych wektorów z tablicy prawdy oznaczamy $\mathbf{m}_{i,}$ gdzie i jest indeksem wektora w tablicy

A	B	C	minitermy
0	0	0	m0=A’B’C’
0	0	1	m1=A’B’C
0	1	0	m2=A’BC’
0	1	1	m3=A’BC
1	0	0	m4=AB’C’
1	0	1	m5=AB’C’
1	1	0	m6=ABC’
1	1	1	m7=ABC

Ćwiczenie

Obliczyć wartość poszczególnych wektorów argumentów dla wszystkich mintermów funkcji dwuargumentowej.

Koniunkcyjna postać kanoniczna funkcji

Postać koniunkcyjna. (iloczynu sum, iloczynu)

Literałem nazywamy zmienną lub zmienną zanegowaną.

Sumą termalną nazywamy sumę dwóch lub więcej literałów.

Maxterm to suma termalna bez powtarzających się zmiennych.

Postać koniunkcyjna funkcji jest tworzona w następujący sposób:

„Każdy wiersz w tablicy prawdy dla którego funkcja przyjmuje wartość 0 tworzy maxterm w którym zmienne przyjmujące wartość 0 są wpisywane w sposób prosty, a zmienne przyjmujące wartość 1 w sposób zanegowany. Tak tworzone maxtermy są mnożone tworząc kanoniczną postać koniunkcyjną dla funkcji.”

Maxtermy utworzone dla poszczególnych wektorów z tablicy prawdy oznaczamy $M_{i,}$ gdzie i jest indeksem wektora w tablicy

A	B	C	maxtermy
0	0	0	M0=A+B+C
0	0	1	M1= A+B+C’
0	1	0	M2= A+B’+C
0	1	1	m3= A+B’+C’
1	0	0	M4= A’+B+C
1	0	1	M5= A’+B+C’
1	1	0	M6= A’+B’+C
1	1	1	M7= A’+B’+C’

Ćwiczenie

Obliczyć wartość poszczególnych wektorów argumentów dla wszystkich maxtermów funkcji dwuargumentowej.

Postacie kanoniczne funkcji - przykład

i	X	Y	Z	f	f’
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	0

Postać kanoniczna dysjunkcyjna (sumy)funkcji f. Wyznaczamy $F^1=\{3,4,5,6,7\}$

f(X,Y,Z)=m3+m4+m5+m6+m7 **(zapis skrócony)**

f(X,Y,Z)=X’YZ+XY’Z’+XY’Z+XYZ’+ XYZ (zapis pełny)

Postać kanoniczna koniunkcyjna (iloczynu) funkcji f. Wyznaczamy $F^0=\{0,1,2\}$

f(X,Y,Z)=M0•M1•M2=(X+Y+Z) • (X+Y+Z’) •(X+Y’+Z)

Postać kanoniczna dysjunkcyjna funkcji f’. Wyznaczamy $(F')^1=\{0,1,2\}$

f ‘(X,Y,Z)=m0+m1+m2=(X’Y’Z’) +(X’Y’Z) +(X’YZ’)

Postać kanoniczna koniunkcyjna funkcji f’ Wyznaczamy $(F')^0=\{3,4,5,6,7\}$

f’ (X,Y,Z)=M3+M4+M5+M6+M7=(X+Y’+Z’)•(X’+Y+Z) •(X’YZ’) •(X’+Y’+Z) •(X’+Y’+Z’)

Ćwiczenie

1. Korzystając z praw de Morgana przekształcić postać kanoniczną sumy funkcji f na postać kanoniczną iloczynu funkcji f’.
2. 1. Korzystając z praw de Morgana przekształcić postać kanoniczną iloczynu funkcji f na postać kanoniczną sumy funkcji f’.

Postacie kanoniczne – przykład C.D.

Postać kanoniczna wytworzona w ten sposób nie jest najprostszą z możliwych postaci w sensie minimalnej ilości literałów czy termów.

Minimalna postać dysjunkcyjna funkcji f:
f=X'YZ+XY'Z'+XY'Z+XYZ'+ XYZ= X'YZ+X•(Y'Z'+Y'Z+YZ'+YZ)= X'YZ+X•(Z•(Y+Y')+Z' •(Y+Y'))= X'YZ+X•(Z•1+Z' •1)= X'YZ+X•(Z+Z')= **X'YZ+X**

Minimalna postać koniunkcyjna funkcji f:
f=(X+Y+Z) •(X+Y+Z') •(X+Y'+Z)=$^{\text{ROZDZIELNOŚĆ}}$= ((X+Y) +(Z •Z')) •(X+Y'+Z)=(**X+Y) •(X+Y'+Z)**

<u>Aby otrzymać koniunkcyjną postać kanoniczną można zastosować prawa de Morgana do postaci dysjunkcyjnej f'. I odwrotnie.</u>
<u>Aby uzyskać minimalną postać koniunkcyjną f stosujemy prawa de Morgana do minimalnej postaci dysjunkcyjnej f'. I odwrotnie.</u>

Minimalna postać koniunkcyjna funkcji f ':
f'=(f)'= (X'YZ+X)'=(X'YZ)' • X'=(X+(YZ)') •X'=(**X+Y'+Z') •X'**
Minimalna postać dysjunkcyjna funkcji f ':
f'=(f)'=((X+Y) •(X+Y'+Z))' =((X+Y)' + (X+Y'+Z)')=**X'Y'+X'YZ'**

Postać kanoniczna sumy wyłączającej

Postać kanoniczna sumy wyłączającej (EXOR) funkcji przyjmuje postać:

$$f(x_1, x_2, x_3,..., x_n) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_1 \oplus \beta_2 x_2 \oplus \beta_3 x_1 x_2 \oplus \ ... \ \oplus \beta_{2^N-1} x_1 x_2 ... x_n$$

gdzie współczynniki $\beta_{0,} \beta_{1,} \beta_{2} \, ... \, \beta_N = \{0,1\}$ w zależności czy dany term istnieje czy nie.

Ćwiczenie

Przedstaw w postaci kanonicznej sumy wyłączającej funkcję $f(x_2,x_1)$: $F^0=\{0\}$

Postać kanoniczna sumy wyłączającej C.D.

Przykład. Funkcja trzech zmiennych.

$f(x_1, x_2, x_3) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_1 \oplus \beta_2 x_2 \oplus \beta_3 x_1 x_2 \oplus \beta_4 x_3 \oplus \beta_5 x_1 x_3 \oplus \beta_6 x_2 x_3 \oplus \beta_7 x_1 x_2 x_3$

$f(0,0,0) = \beta_0$

$f(1,0,0) = \beta_0 \oplus \beta_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = f(1,0,0) \oplus \beta_0$

$f(0,1,0) = \beta_0 \oplus \beta_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = f(0,1,0) \oplus \beta_0$

$f(0,0,1) = \beta_0 \oplus \beta_4 \quad \Rightarrow \quad \beta_4 = f(0,0,1) \oplus \beta_0$

$f(1,1,0) = \beta_0 \oplus \beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \beta_3 \quad \Rightarrow \quad \beta_3 = f(1,1,0) \oplus \beta_0 \oplus \beta_1 \oplus \beta_2$

$f(1,0,1) = \beta_0 \oplus \beta_1 \oplus \beta_4 \oplus \beta_5 \quad \Rightarrow \quad \beta_5 = f(1,0,1) \oplus \beta_0 \oplus \beta_1 \oplus \beta_4$

$f(0,1,1) = \beta_0 \oplus \beta_2 \oplus \beta_4 \oplus \beta_6 \quad \Rightarrow \quad \beta_6 = f(0,1,1) \oplus \beta_0 \oplus \beta_2 \oplus \beta_4$

$f(1,1,1) = \beta_0 \oplus \beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \beta_4 \oplus \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 \quad \Rightarrow \quad \beta_7 = f(1,1,1) \oplus \beta_0 \oplus \beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \beta_4 \oplus \beta_5 \oplus \beta_6$

Pamiętając że: $x \oplus x = 0$ i $x \oplus 0 = x$ podstawiamy i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
f(A,B,C) = \; & f(0,0,0) \oplus [f(0,0,0) \oplus f(1,0,0)]\, x_1 \oplus [f(0,0,0) \oplus f(0,1,0)]\, x_2 \oplus [f(0,0,0) \oplus f(0,0,1)]\, x_3 \oplus \\
& \oplus [f(0,0,0) \oplus f(1,0,0) \oplus f(0,1,0) \oplus f(1,1,0)\,]\, x_1 x_2 \oplus \\
& \oplus [f(0,0,0) \oplus f(1,0,0) \oplus f(0,0,1) \oplus f(1,0,1)]\, x_1 x_3 \oplus \\
& \oplus [f(0,0,0) \oplus f(0,1,0) \oplus f(0,0,1) \oplus f(0,1,1)]\,]\, x_2 x_3 \oplus \\
& \oplus [f(0,0,0) \oplus f(1,0,0) \oplus f(0,1,0) \oplus f(0,0,1) \oplus f(1,1,0) \oplus f(1,0,1) \oplus f(0,1,1) \oplus f(1,1,1)\,]\, x_1 x_2 x_2
\end{aligned}$$